Discrete Geometries of Mathematics and Physics

创新实验

实验指导书

数值积分的编程实现

Yi Zhang (张仪)

: www.mathischeap.com

@: zhangyi_aero@hotmail.com

git: https://github.com/mathischeap

1 实验基本信息

1.1 实验名称

数值积分的编程实现

1.2 实验指导老师联系方式

张仪(www.mathischeap.com), 数学与计算科学学院，花江慧谷4#-408A

- 手机： 199 7417 1867
- email: zhangyi_aero@hotmail.com
- QQ: 360 788 903

1.3 所属课程名称

创新实验

2 实验的目的、意义、要求

2.1 实验目的

使实验参与者理解数值积分的数学原理并能够使用编程语言进行完成数值积分的程序实现。

2.2 实验意义

- 学习认识数值积分在科学计算领域的广泛应用。
- 理解数值积分的数学原理。
- 使用编程语言完成数值积分的程序实现。

2.3 实验要求

- 具备一定的编程能力。你可以选择使用你熟悉的编辑语言。推荐使用Python进行编程。
- 完成实验报告并发回你的程序。你可以通过查询网络（或询问AI等）搜集信息，但不允许从网络直接复制或要求AI生成代码或实验报告。

3 实验主页

你可以访问`https://mathischeap.com/contents/teaching/innoexp/numerical_integration/main#course-InnoExp-numerical-integration`查看有关本实验的所有信息。

4 实验详情

4.1 实验背景

在高数中我们已经对积分非常熟悉了。我们可以通过各种积分公式和技巧手动完成各种各样的积分。然而，在实际工程应用中，我们面对的积分对象千奇百怪，很多时候我们无法找到可用的公式或技巧完成积分，或者所需的时间成本过大。这个时候，我们想要借助计算机来完成积分。计算机的特点是计算速度快，但是它只能进行简单的运算（如加减法、乘法等）。因此，我们需要使用某种算法把这个积分问题转化为多个简单运算。这种积分运算方法被称作数值积分。

数值积分的方法很多，其中用途最为广泛的一个方法是Gauss-Legendre quadrature[1, 2, 3]。通过本实验，我们将一起学习此数值积分方法并完成编程实现。

4.2 实验原理和过程

4.2.1 实验步骤一：一维函数的数值积分

我们考虑一个一维线段$[-1,1]$。给定一个正整数N，我们可以计算出一系列Gauss采样点G_n和Gauss权重G_w:

$$G_n = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\},$$
$$G_w = \{w_1, w_2, \cdots, w_N\},$$

其中$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N < 1$, $w_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$。注意，我们无需自己编程、而是可以通过直接调用现存函数，如Python中的

`numpy.polynomial.legendre.leggauss`,

来完成采样点和权重的计算。如

```
>>> quad_nodes, quad_weights = numpy.polynomial.legendre.leggauss(3)
```

其中`quad_nodes`为采样点，`quad_weights`为权重。

对于定义在$[-1,1]$上的一个一维函数$f(\lambda)$，$\lambda \in [-1,1]$，它在$[-1,1]$积分为

$$\int_{-1}^{1} f(\lambda) \mathrm{d}\lambda.$$

我们可以采用Gauss-Legendre quadrature来近似这个积分，也就是

$$\int_{-1}^{1} f(\lambda) \mathrm{d}\lambda \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(\lambda_i) = w_1 f(\lambda_1) + w_2 f(\lambda_2) + \cdots + w_N f(\lambda_N). \tag{1}$$

值得注意的是，如果被积函数本身就是多项式且它的阶数小于等于$2N-1$，那么上述数值积分将是精确的。

任务1：编程实现一维数值积分(1)

你需要编写一个程序计算定义在$[-1,1]$内的函数$f(\lambda)$的数值积分(1)，并使用此程序计算下列函数在$[-1,1]$上的积分：

$$\sin(2\pi\lambda) + 1, \quad e^{\lambda + \cos(\pi\lambda/2)}, \quad \frac{e^{\sin(\pi\lambda)}}{\lambda^2 + \cos(\lambda) + 5}$$

你可以在本实验主页下载到此任务对应的Python程序模板。

4.2.2 实验步骤二：二维函数在参考域上的数值积分

我们考虑二维空间。假设我们有一个参考坐标系(ξ, η)。在这个参考坐标系下，参考域被定义成$\Omega_{\mathrm{r}} = (\xi, \eta) \in [-1,1]^2$。在此参考域下，由于沿着两个坐标轴的范围都是$[-1,1]$，所以我们可以沿着两个坐标轴都定义Gauss采样点。它们被表示成

$$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N\}, \quad \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N\}. \tag{2}$$

在Ω_{r}里，给定一个函数$f(\xi, \eta)$，我们可以使用二维Gauss-Legendre quadrature来近似它的积分，

$$\int_{\Omega_{\mathrm{r}}} f(\xi, \eta) \mathrm{d}\Omega = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \approx \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j). \tag{3}$$

任务2：编程实现二维参考域上的数值积分(3)

你需要编写一个程序计算定义在$\Omega_\mathrm{r} = [-1,1]^2$内的函数$f(\lambda)$的数值积分(3)，并使用此程序计算下列函数在$[-1,1]^2$上的积分：

$$\sin(2\pi\xi)\cos(2\pi\eta)+1, \quad e^{\xi^2+\cos(\pi\eta/2)}, \quad \frac{e^{\sin(2\pi(\xi+\eta))}}{\xi\eta+\cos(\xi^2)\sin(\eta^2)+5}$$

你可以在本实验主页下载到此任务对应的Python程序模板。

4.2.3 实验步骤三：二维函数在任意积分域上的数值积分

在之前的实验步骤中我们已经学会了如何计算二维函数在参考域里的数值积分。然而，在实际情况下，积分域千变万化。所以我们需要知道如何从参考域拓展至一般积分域。

假设在二维空间中下有一个定义在坐标系(x,y)下的域Ω，且存在一个映射Φ将参考域Ω_r映射至Ω，即

$$\Phi : \Omega_\mathrm{r} \to \Omega,$$

使得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Phi(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \Phi_x(\xi,\eta) \\ \Phi_y(\xi,\eta) \end{bmatrix}.$$

注意：我们这里要求Φ是C^1连续的，即它的一阶偏导存在。 对于Φ，它的雅可比矩阵$\mathcal{J}$是

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

由于Φ是一阶连续的，所以这个雅可比矩阵必然存在。我们可以进一步计算这个雅可比矩阵的行列式，并记作J，

(4) $$J = \det\left(\mathcal{J}\right).$$

任务3.1：编程实现二维映射的雅可比矩阵的行列式(4)的计算

你需要编写一个程序计算二维映射雅可比矩阵的行列式(4)，并用它来计算下列映射的雅可比矩阵的行列式:

$$\Phi_0 : \Omega_\mathrm{r} \to \Omega_0$$

其中Ω_0是一个标准矩形$[a,b]\times[c,d]$，即它的左下角点的坐标为(a,c)，边长分别为$(b-a)$和$(d-c)$。你可以在本实验主页下载到此任务对应的Python程序模板。

现在，我们一起学习如何使用Gauss-Legendre quadrature来计算Ω里的数值积分。给定定义在Ω里的连续函数函数$f(x,y)$，那么

(5) $$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\Omega \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j J(\xi_i,\eta_i) f(x_i,y_i).$$

其中采用点(x_i, y_j)为参考域内的采样点(ξ_i, η_j)，见(2)，在Ω里的映射，即

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_j \end{bmatrix} = \Phi(\xi_i, \eta_j) = \begin{bmatrix} \Phi_x(\xi_i, \eta_j) \\ \Phi_y(\xi_i, \eta_j) \end{bmatrix}, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}.$$

从(5)中我们可以看到，如果J是一个常数函数，即$J(\xi_i, \eta_i)$与(ξ_i, η_i)无关，(5)可以表示成

$$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}\Omega \approx J \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j f(x_i, y_i). \tag{6}$$

这时，Ω里的数值积分(6)与参考域内的数值积分(3)区别不大。

任务3.2：编程实现二维函数在任意积分域上的数值积分(6)

你需要编写一个程序计算二维函数在任意积分域上的数值积分(6)，并用它来计算下列数值积分:

$$\int_{\Omega_1} \sin(2\pi x) + \cos(2\pi y)\mathrm{d}\Omega,$$

$$\int_{\Omega_2} e^{\cos(2\pi x)\sin(\pi y^2)}\mathrm{d}\Omega,$$

$$\int_{\Omega_3} \frac{\ln\left(e^x \sin(\pi y) + 10\right)}{x^2 + y^2 + 1}\mathrm{d}\Omega,$$

其中Ω_1是一个标准矩阵$[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$，$\Omega_2$是一个标准矩阵$[1, 2] \times [1, 3]$，$\Omega_3$是一个由如下映射定义的积分域:

$$\Phi_3 : \Omega_{\mathrm{r}} \to \Omega_3,$$

使得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Phi(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \Phi_x(\xi, \eta) \\ \Phi_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi + \frac{1}{10}\sin(\pi\xi)\sin(\pi\eta) + 1 \\ \eta + \frac{1}{10}\sin(\pi\xi)\sin(\pi\eta) + 1 \end{bmatrix}.$$

你可以在本实验主页下载到此任务对应的Python程序模板。

5 总结

在完成上述实验步骤后，你需要完成一份完整的实验报告并附上你编写的代码。

References

[1] A. H. Stroud, D. Secrest, Gaussian Quadrature Formulas, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1966.

[2] W. H. Beyer, CRC Standard Mathematical Tables, 28th ed., Boca Raton, FL: CRC Press, 1987.

[3] F. S. Acton, Numerical Methods That Work, 2nd printing, Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1990.